E.N.S. SEVRES & ULM 1982

ÉPREUVE PRATIQUE DE MATHÉMATIQUES

(4 h)

L'objet du problème est l'étude d'un procédé d'interpolation polynomiale de fonctions de plusieurs variables.

I

On note $x = (x_i)_{i=1}^n$ le point courant de $\mathbb{R}^n$. Pour tout entier $k \geqslant 0$, on désigne par P_k^n l'espace vectoriel formé par tous les polynômes réels de degré $\leqslant k$ en les n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$: Autrement dit, l'espace P_k^n est constitué de tous les polynômes p de la forme

$$p : x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n \longrightarrow p(x) = \sum_{\substack{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \leqslant k \\ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n}} \gamma_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n},$$

les coefficients $\gamma_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}$ étant des nombres réels fixés pour un polynôme donné.

1° Calculer la dimension de l'espace P_k^n en fonction des entiers n et k. Pour cela, on procédera à partir de résultats connus pour $n = 1$, en donnant toutes les justifications nécessaires.

2° Soit b_j, $1 \leqslant j \leqslant n+1$, des points de $\mathbb{R}^n$ non situés dans un même hyperplan affine (un hyperplan affine de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des points $x = (x_i)_{i=1}^n$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant une équation de la forme

$$\beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i = 0,$$

les nombres $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ n'étant pas tous nuls).

Montrer qu'à tout point $x \in \mathbb{R}^n$, on peut associer d'une et d'une seule façon $(n+1)$ nombres $\lambda_j(x)$, $1 \leqslant j \leqslant n+1$, vérifiant :

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x)\, b_j = x \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) = 1.$$

Les fonctions $\lambda_j : x \in \mathbb{R}^n \to \lambda_j(x) \in \mathbb{R}$ ainsi définies sont appelées les *coordonnées barycentriques*, relativement aux points b_j.

3° Soit $\Sigma = \bigcup_{i=1}^N \{a_i\}$ un ensemble de N points distincts de $\mathbb{R}^n$, et P un espace vectoriel de fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}^n$. On dit que l'ensemble Σ est P- *admissible* si, étant donné des nombres $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant i \leqslant N$, arbitraires, il existe une et une seule fonction de l'espace P telle que :

$$p(a_i) = \alpha_i,\ 1 \leqslant i \leqslant N.$$

Par suite, si v est une fonction réelle définie sur un ensemble contenant les points a_i, $1 \leqslant i \leqslant N$, il existe une et une seule fonction πv vérifiant

$$\pi v \in P \text{ et } \pi v(a_i) = v(a_i),\ 1 \leqslant i \leqslant N\ .$$

La fonction πv est appelée la fonction de (Σ, P) — *interpolation* de la fonction v. Montrer que cette fonction s'écrit sous la forme

$$\pi v = \sum_{i=1}^N v(a_i)\, p_i,$$

où les fonctions p_i, qui sont des fonctions de l'espace P indépendantes de la fonction v, sont appelées les *fonctions de base de* (Σ, P) — *interpolation.*

4° Soit b_j, $1 \leqslant j \leqslant n+1$, des points de $\mathbb{R}^n$ non situés dans un même hyperplan affine. Démontrer que l'ensemble

$$\Sigma_1 \overset{\text{déf}}{=} \bigcup_{j=1}^{n+1} \{b_j\}$$

. . . / . . .

M 7 1 69 1

est P_1^n — admissible, et que la fonction de (Σ_1, P_1) — interpolation associée est de la forme

$$\pi_1 v = \sum_{j=1}^{n+1} v(b_j)\, p_{1j},$$

où les polynômes p_{1j} sont des fonctions *que l'on explicitera* des coordonnées barycentriques introduites à la question 2°.

5° Soit b_j, $1 \leqslant j \leqslant n+1$, des points de $\mathbb{R}^n$ non situés dans un même hyperplan affine. On définit les points

$$b_{ij} = \frac{1}{2}(b_i + b_j), \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n+1.$$

Démontrer que l'ensemble

$$\Sigma_2 \overset{\text{déf}}{=} \left(\bigcup_{j=1}^{n+1} \{b_j\} \right) \cup \left(\bigcup_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} \{b_{ij}\} \right)$$

est P_2^n — admissible, et que la fonction de (Σ_2, P_2) — interpolation associée est de la forme

$$\pi_2 v = \sum_{j=1}^{n+1} v(b_j)\, p_{2j} + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} v(b_{ij})\, p_{2ij},$$

où les polynômes p_{2j} et p_{2ij} sont des fonctions *que l'on explicitera* des coordonnées barycentriques.

6° Soit b_j, $1 \leqslant j \leqslant 3$, trois points distincts non alignés de $\mathbb{R}^2$. On définit les points

$$c_{ij} = \frac{2b_i + b_j}{3}, \quad 1 \leqslant i \leqslant 3, \quad 1 \leqslant j \leqslant 3, \quad \text{et} \quad c = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}.$$

Démontrer que l'ensemble

$$\left(\bigcup_{j=1}^{3} \{b_j\} \right) \cup \left(\bigcup_{i,j=1}^{3} \{c_{ij}\} \right) \cup \{c\}$$

est P_3^2 — admissible.

7° L'ensemble $\bigcup_{i,j=1}^{3} \{c_{ij}\}$ est-il P_2^2 — admissible?

II

Si $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction m fois dérivable (m : entier $\geqslant 1$) en un point $a \in \mathbb{R}^n$, on note

$$D^m v(a) : (\mathbb{R}^n)^m \to \mathbb{R}$$

l'application multilinéaire définie pour m vecteurs quelconques $\zeta^p = (\zeta_i^p)_{i=1}^n$, $1 \leqslant p \leqslant m$, de $\mathbb{R}^n$ par

$$D^m v(a)(\zeta^1, \zeta^2, \ldots, \zeta^m) = \sum_{\substack{1 \leqslant i_p \leqslant n \\ 1 \leqslant p \leqslant m}} \zeta_{i_1}^1 \zeta_{i_2}^2 \cdots \zeta_{i_m}^m \frac{\partial^m v(a)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_m}}.$$

Dans le cas où $\zeta^1 = \zeta^2 = \ldots = \zeta^m \overset{\text{déf}}{=} \zeta$, on note

$$D^m v(a)(\zeta, \zeta, \ldots, \zeta) = D^m v(a)\, \zeta^m.$$

8° Notant $\| . \|$ la norme euclidienne de l'espace $\mathbb{R}^n$, démontrer que, pour tout entier $m \geqslant 1$,

$$\max_{\substack{1 \leqslant i_p \leqslant n \\ 1 \leqslant p \leqslant m}} \left| \frac{\partial^m v(a)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_m}} \right| \leqslant \sup_{\substack{\zeta^p \in \mathbb{R}^n,\ \|\zeta^p\| = 1, \\ 1 \leqslant p \leqslant m}} | D^m v(a)(\zeta^1, \zeta^2, \ldots, \zeta^m) |$$

$$\leqslant C(m, n) \max_{\substack{1 \leqslant i_p \leqslant n \\ 1 \leqslant p \leqslant m}} \left| \frac{\partial^m v(a)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_m}} \right|,$$

la constante $C(m, n)$ ne dépendant que des entiers m et n.

9° Si $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction $(k+1)$ fois continûment dérivable (k : entier $\geqslant 0$), et si a et b sont deux points quelconques de $\mathbb{R}^n$, on admettra la *formule de Taylor* suivante :

$$v(b) = v(a) + \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m!} D^m v(a)(b-a)^m + \mathcal{R}_k(v; b, a),$$

où

$$\mathcal{R}_k(v; b, a) = \frac{1}{k!} \int_0^1 (1-t)^k \{ D^{k+1} v(tb + (1-t)a)(b-a)^{k+1} \}\, dt.$$

. . . / . . .

Soit alors $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{N} \{ a_i \}$ un ensemble P — admissible, où P est un espace vectoriel de fonctions réelles de classe C^k définies sur $\mathbb{R}^n$, et p_i, $1 \leqslant i \leqslant N$, les fonctions de base de (Σ, P) — interpolation associées (cf. question 3°); soit par ailleurs $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction $(k+1)$ fois continûment dérivable (k : entier $\geqslant 0$), et πv la fonction de (Σ, P) — interpolation associée. On suppose que l'espace P vérifie l'inclusion

$$P_k^n \subset P.$$

Démontrer les *identités :*

$$(\pi v - v)(x) = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{R}_k(v; a_i, x)\, p_i(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n,$$

$$D^m(\pi v - v)(x) = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{R}_k(v; a_i, x)\, D^m p_i(x),\ 1 \leqslant m \leqslant k,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ (si $k \geqslant 1$).

10° Si $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction m fois continûment dérivable (m : entier $\geqslant 1$), et si T est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$, on pose :

$$|v|_{0,T} = \sup_{x \in T} |v(x)|,$$

$$|v|_{m,T} = \sup_{x \in T} \sup_{\left\{ \begin{array}{l} \zeta^p \in \mathbb{R}^n, \|\zeta^p\| = 1, \\ 1 \leqslant p \leqslant m \end{array} \right.} |D^m v(x)(\zeta^1, \zeta^2, \ldots, \zeta^m)|,\ m \geqslant 1.$$

Avec les mêmes hypothèses qu'à la question 9°, montrer que, si T est une partie convexe bornée de $\mathbb{R}^n$ contenant Σ,

$$|v - \pi v|_{0,T} \leqslant \frac{h_T^{k+1}}{(k+1)!} |v|_{k+1,T} \sum_{i=1}^{N} |p_i|_{0,T},$$

$$|v - \pi v|_{m,T} \leqslant \frac{h_T^{k+1}}{(k+1)!} |v|_{k+1,T} \sum_{i=1}^{N} |p_i|_{m,T},\ 1 \leqslant m \leqslant k,$$

où

$$h_T = \sup_{\left\{ \begin{array}{l} x \in T \\ y \in T \end{array} \right.} \|x - y\|.$$

11° Soit b_j, $1 \leqslant j \leqslant n+1$, des points de $\mathbb{R}^n$ non situés dans un même hyperplan. On définit l'ensemble

$$T = \left\{ x = \sum_{j=1}^{n+1} \mu_j b_j ;\ 0 \leqslant \mu_j \leqslant 1,\ \sum_{j=1}^{n+1} \mu_j = 1 \right\}.$$

Si $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction 2 fois continûment dérivable, démontrer que la fonction de (Σ_1, P_1) — interpolation associée (cf. question 4°) vérifie

$$|v - \pi_1 v|_{0,T} \leqslant C_1(n)\, h_T^2\, |v|_{2,T},$$

où $C_1(n)$ est une constante ne dépendant que de l'entier n.

12° Avec les mêmes notations qu'à la question précédente, montrer que si $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction 3 fois continûment dérivable, la fonction de (Σ_2, P_2) — interpolation associée (cf. question 5°) vérifie

$$|v - \pi_2 v|_{0,T} \leqslant C_2(n)\, h_T^3\, |v|_{3,T},$$

où $C_2(n)$ est une constante ne dépendant que de l'entier n.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail